表面粗糙度對以磁性流體為潤滑液之階梯軸承效應分析

江新祿　周祖亮*　謝煦為　徐耀忠

南亞技術學院 機械工程學系

摘要

本文以鐵磁性流體為潤滑劑，探討表面粗糙之無限長二階步階軸承的性能。鐵磁性流體對軸承的性能之影響，採用Shah之理論模式，分析模式中包含鐵磁性流體特性之修正項 $\mu_0 M(\partial H/\partial x)+(16\pi\mu_0 r^3\chi M)/(9(l+2)^3)(\partial H/\partial x)$；表面粗糙度對軸承性能之效應，採用Christensen隨機粗糙度模式，即軸承表面加工受刀具作用，造成一維縱向粗糙或一維橫向粗糙。軸承壓力分佈及負載能力等軸承性能以磁性參數、粗糙度參數及步階形狀參數表示。分析結果顯示，使用鐵磁性流體為潤滑劑，可提高軸承之壓力分佈及負載能力。步階軸承以鐵磁性流體作為潤滑劑時，是否受到外加磁場作用，其軸承操作性能有明顯差異。具橫向粗糙度之步階軸承，以鐵磁性流體為潤滑液，在受外加磁場作用時，可提升步階軸承的潤滑操作性能。

關鍵字：鐵磁性流體、表面粗糙度、二階步階軸承

*Email：chou@nanya.edu.tw　　Tel：03-4361070 # 6404　　Fax：03-4384670

Effect of Surface Roughness on the Lubrication of Step Bearings with Ferrofluid

Hsiu-Lu Chiang, Tsu-Liang Chou, Ming-Wei Hsieh and Yao-Jong Syhu

Department of Mechanical Engineering, Nanya Institute of Technology

Abstract

The main purpose of this study is to discuss the affections of ferrofluid combined with surface roughness to the infinite long two step bearing. To consider the influences of ferrofluid to the two step bearing, the Shah's theoretical model is adopted, and the modified item of ferrofluid characteristic, $\mu_0 M(\partial H/\partial x)+(16\pi\mu_0 r^3\chi M)/9(l+2)^3(\partial H/\partial x)$, proposed by Shah is included. On the basis of the Christensen's stochastic model, the longitudinal or transverse one dimensional roughness effects to the two step bearing due to surface finishing are explored. The pressure distribution and load carry capacity of the bearing system can be expressed as function of magnetic parameter, roughness parameter and shape parameter. According to the results, the two step bearing lubricated with ferrofluid can enhance the pressure distribution and improve the load carry capacity. When the bearing system is lubricated with magnetic ferrofluid, whether the system subjected to external magnetic field or not, the performance characteristics have significant affections. If the two step bearing possessed with transverse one dimensional roughness, lubricated with ferrofluid and subjected to external magnetic field, the lubrication performances of the two step bearing can be highly improved.

Keyword：ferrofluid, surface roughness, two step bearing

壹、 前言

步階滑動軸承之研究 Naduvinamani [1]於 1997 就已展開，至於步階擠壓軸承之研究，首推 Majumdar [2]。Majumdar 使用傳統之潤滑劑分析步階軸承之性能。Shah 和 Bhat [3]利用 MHD 動量方程式、Maxwell 方程式，對孔隙滑動軸承之性能作進一步探討。Shah[4]同時延續 Majumdar 之研究，採用鐵磁性流體為潤滑劑，並在鐵磁性流體特性之表示式中增列一個修正項，將鐵磁性流體之特性以更實際之狀態呈現，並進一步探討階梯軸承之性能。Dobrica 和 Fillon [5]則將流體黏度視為溫度之函數，分析對階梯軸承性能之影響。

前述研究中，均假設軸承表面情況是完全光滑。Zhu [6]研究軸承表面因製造過程所產生之粗糙情況，可能以橫向、縱向或等向等三種不同粗糙形式出現。當流體機械的軸承表面粗糙度相較於擠壓薄膜厚度，在數量級量測不可忽略時，表面粗糙度對擠壓薄膜特性會有很大的影響。因此軸承表面粗糙度之影響，有進一步探討之必要。對於粗糙度形狀之探討，根據隨機的觀念，在表面粗糙的軸承中，因局部薄膜厚度之隨機現象造成局部液動壓力為一隨機值，於是 Christensen 和 Tonder [7-8]針對橫向及縱向兩種不同粗糙度形式，推導出統御平均壓力的隨機雷諾方程式(stochastic Reynolds equation)，並進一步得到粗糙度效應對轉動軸承性能之影響。Gururajan 和 Prakash [9]將 Christensen 粗糙度模式應用於無限長孔隙軸頸軸承之分析；Chiang 等人[10]則將該模式應用於有限滑動軸承之動態分析上，均獲得良好之成效。Naduvinamani 和 Siddangouda [11]則探討表面粗糙度理論非零平均值、變異數和不對稱性(non-zero mean, variance and skewness)對孔隙步階軸承之流體動態潤滑特性之效應。

本文探討在橫向及縱向兩種不同粗糙度形式之表面粗糙度，對鐵磁性流體為潤滑劑之二階段步階軸承的性能影響。

貳、 數學模式

本文分析之無限長二階段步階軸承，如圖 1 所示。軸承之上表面是由長度各為 B_1 和 B_2，且與 x 軸平行的步階表面所構成，膜厚參數 $a = h_1 / h_2$。薄膜厚度為

$$h_S = \begin{cases} h_1 & 0 \le x \le B_1 \\ h_2 & B_1 \le x \le B \end{cases} \tag{1}$$

其中 $h_1 > h_2$。上表面以均勻速度 $V = -(dh_s / dt)$，垂直向下運動，使上下表面間之流體產生 p_1 和 p_2 之壓力。軸承沿 z 軸向之長度為 L，且 $L >> B$。

外加磁場H朝 y 方向，亦即對壓力分佈及軸承性能影響最大之方向，於軸承二端其值為零。H之定義為

$$H^2 = Kx(B-x) \tag{2}$$

其中K為滿足等式兩側因次齊次要求之物理量。依據 Shah [4]之研究，步階軸承流動方程式為：

$$\frac{d}{dx}\left\{h^3\frac{d}{dx}\left[P-\frac{1}{2}(1+\alpha)\mu_o\chi H^2\right]\right\}=12\zeta\frac{dh}{dt} \tag{3}$$

其中，ζ為流體黏度(fluid viscosity)，χ 為磁化率(susceptibility)，$(1+\alpha)\mu_o$為透磁率(permeability)。

根據 Christensen 隨機粗糙度模式，軸承之表面粗糙度，大致可分為一維縱向(longitudinal one dimensional)及一維橫向(transverse one dimensional)兩類型。若考慮粗糙度是以一近似高斯分佈(Gaussian distribution)之多項式形式的隨機薄膜厚度函數來表示。並依據隨機理論模式(stochastic models)，擠壓薄膜厚度h可視為一隨機變量，其值由兩部份組成：

$$h = h_S + \delta(x,z,\xi) \tag{4}$$

其中 h 為薄膜幾何光滑面厚度，δ為從光滑面量測之表面粗糙度部份，ξ為一隨機變量。一般假設δ之平均值為零。近似高斯分佈之粗糙度密度分佈曲線可表示成

$$f(\delta)=\begin{cases}\dfrac{35}{32c^7}\left(c^2-\delta^2\right)^3 & if\ -c\le\delta\le c\\ 0 & elsewhere\end{cases} \tag{5}$$

其中 c 為隨機薄膜厚度變數全部範圍之一半，且函數終止於$c=\pm3\sigma$，此處σ為近似高斯分佈曲線函數之標準差(standard deviation)。

一、粗糙度隨機雷諾方程式

依 Christensen 隨機粗糙度模式，並對流動方程式(3)等式兩邊取期望值，可得步階軸承在**一維縱向粗糙度模式**之隨機流動方程式如下：

$$\frac{d}{dx}\left\{E(h^3)\frac{d}{dx}\left[E(P)-\frac{1}{2}(1+\alpha)\mu_o\chi H^2\right]\right\}=12\zeta\frac{dE(h)}{dt} \tag{6}$$

其中，$E(\cdot)$代表期望值運算子，其定義為

$$E(\cdot)=\int_{-\infty}^{\infty}(\cdot)f(\delta)d\delta \tag{7}$$

若定義以下無因次參數：

$$C=\frac{c}{h_2},\ X=\frac{x}{B},\ a=\frac{h_1}{h_2},\ P^*=\frac{h_2^3E(P)}{\zeta VB^2},\ B^*=\frac{B_1}{B},\ \overline{\mu}=\frac{\mu_0Kh_2^3}{\zeta V}$$

$$h^*=\frac{h_S}{h_2},\ \mathrm{M}^*=\frac{1}{2}(1+\alpha)\overline{\mu}\chi, \tag{8}$$

一維縱向粗糙度隨機雷諾方程式(6)可簡化如下：

$$\frac{d^2}{dX^2}[P^*-\mathrm{M}^*X(1-X)]=-\frac{36}{h^*(3h^{*2}+C^2)} \tag{9}$$

對於 $0\le X\le B^*$ ，$h^*=a$ ，$P^*=P_1^*$

$$\frac{d^2}{dX^2}\left[P_1^*-\mathrm{M}^*X(1-X)\right]=-\frac{36}{a(3a^2+C^2)} \tag{9a}$$

對於 $B^*<X\le 1$ ，$h^*=1$ ，$P^*=P_2^*$

$$\frac{d^2}{dX^2}\left[P_2^*-\mathrm{M}^*X(1-X)\right]=-\frac{36}{3+C^2} \tag{9b}$$

依 Christensen 隨機**橫向**粗糙度模式，並對流動方程式(3)等式兩邊取期望值，可得步階軸承在**一維橫向粗糙度模式**之隨機流動方程式如下：

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{E(h^{-3})}\frac{d}{dx}\left[E(P)-\frac{1}{2}(1+\alpha)\mu_o\chi H^2\right]\right\}=12\zeta\frac{d}{dt}\frac{E(h^{-2})}{E(h^{-3})} \tag{10}$$

利用無因次參數(8)，一維橫向粗糙度隨機雷諾方程式(10)可簡化如下：

$$\frac{d^2}{dX^2}\left[P^*-\mathrm{M}^*X(1-X)\right]=-\frac{4(9h^{*4}+2C^4+15h^{*2}C^2)}{h^{*5}(3h^{*2}+2C^2)} \tag{11}$$

對於 $0\le X\le B^*$ $h^*=a$ ，$P^*=P_1^*$

$$\frac{d^2}{dX^2}\left[P_1^*-\mathrm{M}^*X(1-X)\right]=-\frac{4(9a^4+2C^4+15a^2C^2)}{a^5(3a^2+2C^2)} \tag{11a}$$

對於 $B^*<X\le 1$ $h^*=1$ ，$P^*=P_2^*$

$$\frac{d^2}{dX^2}\left[P_2^*-\mathrm{M}^*X(1-X)\right]=-\frac{4(9+2C^4+15C^2)}{3+2C^2} \tag{11b}$$

二、油膜壓力及負載能力

1. 一維縱向粗糙度模式

方程式(10)積分求解，可得步階軸承油膜壓力分佈。對於一維縱向粗糙度模式，首先吾人可對方程式(10a)積分二次，並代入邊界條件 $P_1^*=0, X=0$ 及 $P_1^*=P_c^*, X=B^*$ ，可得

$$P_1^*=\left\{\left[\mathrm{M}^*+\frac{18}{a(3a^2+C^2)}\right]\cdot(B^*-X)+\frac{P_c^*}{B^*}\right\}\cdot X \tag{12a}$$

其中，P_c^* 為階梯交界處之無因次壓力。其次，對方程式(10b)積分二次，並代入邊界

條件 $P_2^* = P_c^*, X = B^*$ 與 $P_2^* = 0, X = 1$，可得

$$P_2^* = \left\{\left[\mathrm{M}^* + \frac{18}{3+C^2}\right]\cdot(X - B^*) - \frac{\overline{P}_c}{B^* - 1}\right\}\cdot(1 - X) \tag{12b}$$

另外，在 $x = B_1$ 之流率(flow rate)須滿足下列連續條件：

$$-\frac{h_1^3}{12\zeta}\frac{dP_1}{dx} = -\frac{h_2^3}{12\zeta}\frac{dP_2}{dx} \tag{13}$$

對方程式(13)取期望值並無因次化之，可得

$$\frac{a(3a^2 + C^2)}{3 + C^2}\cdot\left.\frac{dP_1^*}{dX}\right|_{X=B^*} = \left.\frac{dP_2^*}{dX}\right|_{X=B^*} \tag{14}$$

將方程式(12a)、(12b)代入方程式(14)解 P_c^*，可得

$$P_c^* = \left\{\mathrm{M}^*\left[(1 - B^*) + \mathrm{Z}_L B^*\right] + \frac{18}{3+C^2}\right\}\cdot\left[\frac{B^*(1 - B^*)}{B^* + \mathrm{Z}_L(1 - B^*)}\right] \tag{15}$$

其中，$\mathrm{Z}_L = a(3a^2 + C^2)/(3 + C^2)$。

一旦步階軸承油膜壓力分佈求得，一維縱向粗糙度模式無因次化之負載能力 W^* 便可積分求得

$$\begin{aligned} W^* &= \int_0^{B^*} P_1^* dX + \int_{B^*}^1 P_2^* dX \\ &= \frac{1}{6}\mathrm{M}^*(1 - 3B^* + 3B^{*2}) + \frac{3B^{*3}}{a(3a^2 + C^2)} + \frac{3(1 - B^*)^3}{3 + C^2} + \frac{P_c^*}{2} \end{aligned} \tag{16}$$

2. **一維橫向粗糙度模式**

對於一維橫向粗糙度模式，要求得步階軸承的油膜壓力分佈，首先吾人對方程式(11a)積分二次，並代入邊界條件 $P_1^* = 0, X = 0$ 及 $P_1^* = P_c^*, X = B^*$，可得

$$P_1^* = \left[(\mathrm{M}^* + \frac{G}{2})\cdot(B^* - X) + \frac{\overline{P}_c}{B^*}\right]\cdot X \tag{17a}$$

其中，$G = 4(9h^{*4} + 2C^4 + 15h^{*2}C^2)/h^{*5}(3h^{*2} + 2C^2)$。其次，對方程式(11b)積分二次，並代入邊界條 $P_2^* = P_c^*, X = B^*$ 及 $P_2^* = 0, X = 1$，可得

$$P_2^* = \left\{(\mathrm{M}^* + \frac{F}{2})(X - B^*) + \frac{P_c^*}{1 - B^*}\right\}\cdot(1 - X) \tag{17b}$$

其中，$F = 4(9 + 2C^4 + 15C^2)/(3 + 2C^2)$。另外，在 $x = B_1$ 之流率須滿足下列連續條件：

$$\frac{1}{E(h_1^{-3})}\frac{dE(P_1)}{dx} = \frac{1}{E(h_2^{-3})}\frac{dE(P_2)}{dx} \quad , \quad x = B_1 \tag{18}$$

對方程式(18)取期望值並無因次化之，可得

$$\frac{a^5(3 + 2C^2)}{3a^2 + 2C^2}\cdot\left.\frac{dP_1^*}{dX}\right|_{X=B^*} = \left.\frac{dP_2^*}{dX}\right|_{X=B^*} \tag{19}$$

將方程式(17a)、(17b)代入方程式(19)解 P_c^*，可得

$$P_c^* = \left[\frac{B^*(1-B^*)}{Z_T(1-B^*)+B^*}\right]\cdot\left[\mathrm{M}^*(1-B^*+Z_T B^*)+\frac{F}{2}(1-B^*)+\frac{G}{2}Z_T B^*\right] \tag{20}$$

其中，$Z_T = a^5(3+2C^2)/(3a^2+2C^2)$

一旦步階軸承油膜壓力分佈求得，一維橫向粗糙度模式無因次化之負載能力 W^* 便可積分求得

$$W^* = (\mathrm{M}^*+\frac{G}{2})\cdot\left(\frac{B^{*3}}{6}\right)+\frac{P_c^*\cdot B^*}{2}+\frac{1}{6}\cdot\left(\mathrm{M}^*+\frac{F}{2}\right)\cdot(1-3B^*+3B^{*2}-B^{*3})+\frac{P_c^*}{2(1-B^*)}\cdot(1-2B^*+B^{*2}) \tag{21}$$

參、 結果與討論

本研究探討鐵磁性流體，對具表面粗糙度之二階步階軸承性能的影響，其中鐵磁性流體效應採用 Shah 之理論模式，而表面粗糙度則引用 Christensen 的隨機粗糙度模式，用數值解析的方法探討鐵磁性流體潤滑劑對表面粗糙的步階軸承潤滑性能的影響。

不同磁性參數 M^*時，步階軸承壓力之分佈，如圖 2 所示。表面光滑步階軸承，在無外加磁場之情況下，軸承形狀參數 B^*越大（厚膜區），步階軸承之油膜壓力越低。當形狀參數小於 0.5 時，步階軸承左側區域與右側比較，屬於厚膜區，類似短軸承。因此，壓力不易維持，其壓力明顯較低。故左右側之壓力分佈，形成一種馬鞍型不連貫之分佈型態。另一方面，最高壓力之位置，亦隨形狀參數之增加而移向軸承右邊。當步階軸承以鐵磁性流體為潤滑液，受到外加磁場作用時，油膜壓力顯著增加，此增加趨勢在形狀參數越大時，更為明顯。值得注意的是，鐵磁性流體受外加磁場作用時，在形狀參數小於 0.5 時，其油膜壓力會逐漸降低，但是，當形狀參數大於 0.5 時，其油膜壓力則會逐漸增加；亦即，軸承平均壓力在形狀參數等於 0.5 時為最低。總而言之，外加磁場效應會增加步階軸承的平均壓力，此一增加趨勢在較大形狀參數時，更加顯著。

不同形狀參數 B^*，表面粗糙度對步階軸承壓力分佈之影響，如圖 3 所示。結果顯示，在不同形狀參數情況下，縱向粗糙度會降低軸承壓力，而橫向粗糙度則會增加軸承壓力，在形狀參數較小時（B^*=0.25），此一降低（增加）趨勢越是顯著。不同磁性參數 M^*，表面粗糙度對步階軸承壓力分佈之影響，如圖 4 所示。由圖 4 可知，不管步階軸承鐵磁性流體是否受到磁場作用，縱向粗糙度會降低流場壓力，而橫向粗糙度則相反，會改善流場壓力之分佈；同時，當鐵磁性流體受到磁場作用時，流場壓力分佈會大幅提昇。軸承膜厚參數 a 對軸承壓力分佈之影響，如圖 5 所示。結果顯示，減少軸承膜厚參數可提高軸承壓力，此一原因係較大之膜厚參數，軸承上下表面間之油膜厚度差變大，使得軸承壓力無法有效維持所致。因此，

吾人可知，要提昇步階軸承的流體潤滑操作性能，可用橫向粗糙度模式之步階軸承，以鐵磁性流體做為潤滑劑，並外加磁場作用於流場上。

不同磁性參數 M^*和粗糙度參數 C，形狀參數和荷重能力 W^*之關係，如圖 6 所示。在無外加磁場作用下，縱向粗糙度因會使軸承壓力降低，致使負載能力減少，反之橫向粗糙度因會增加軸承壓力，因此負載能力會增加，尤其是在較小形狀參數時，此一增加趨勢更為明顯。另一方面，無論在何種表面粗糙度模式下，負載能力與形狀參數成反比，亦即，負載能力會隨形狀參數之增加而減少。當步階軸承受外加磁場作用時，軸承負載能力會提昇，而負載能力隨著磁性參數增加而增加。值得注意的是，當鐵磁性流體受到外加磁場作用時，負載能力隨著形狀參數增加而減少，但是當形狀參數大於 0.5 時，負載能力卻隨著形狀參數增加而逐漸增加，且此增加趨勢隨著外加磁場強度的增加而益加明顯。不同膜厚參數 a，形狀參數和負載能力之關係，如圖 7 所示。研究顯示，對無外加磁場下之光滑軸承，其膜厚參數越大，負載能力越低，且隨形狀參數增加而減少，此一結果可由圖 5 的軸承壓力分佈與膜厚參數的關係加以說明。另一方面，在不同的膜厚參數 a，當步階軸承受到外加磁場作用，軸承負載能力隨著形狀參數 B^*的增加逐漸遞減，當形狀參數 B^*=0.5 時，軸承負載能力最小，此後軸承負載能力隨著形狀參數 B^*的增加逐漸遞增。由圖 7 可明顯的看出，步階軸承以鐵磁性流體作為潤滑劑時，是否受到外加磁場作用，其軸承操作性能有明顯差異。當無外加磁場作用時，軸承之壓力分佈和負載能力，隨著形狀參數 B^*的增加而減少，而當軸承受到外加磁場作用時，軸承之壓力分佈和負載能力，在形狀參數 B^*=0.5 時達到最小。

肆、 結論

本研究首先從 Shah 之理論模式推導出二階步階軸承的流動方程式，然後引進 Christensen 隨機粗糙度模式，得到軸承系統的隨機修正流動方程式，接著應用適當邊界條件，以解析或數值的技巧，解出潤滑薄膜的壓力分佈並用以計算軸承的負載能力。根據研究結果可得：

(1) 以鐵磁性流體為潤滑劑，並受外加磁場作用，可增加軸承壓力分佈，並有效提升軸承性能。縱向粗糙度會使軸承壓力分佈降低，負載能力減少，橫向粗糙度則相反。增加軸承油膜厚度比，軸承負載能力會降低。

(2) 二階步階軸承以鐵磁性流體作為潤滑劑時，是否受到外加磁場作用，其軸承操作性能有明顯差異。當軸承受到外加磁場作用時，軸承之壓力分佈和負載能力，在形狀參數 B^*=0.5 時達到最小。

伍、 參考文獻

1. Naduvinamani, N.B., “Non-Newtonian effects of second-order fluids on double-layered porous Rayleigh-step bearings,” *Fluid Dynamics Research*, Vol. **21**, pp. 495-507 (1997)
2. Majumdar, B.C., **Introduction to Tribology of Bearing**, Wheeler Pub, pp.87-90 (1999).
3. Shah, R.C., Bhat, M.V., “Analysis of a Porous Exponential Slider Bearing Lubricated with a Ferrofluid Considering Slip Velocity,” *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, Vol. **25**, No. 3, pp. 264-268 (2003)
4. Shah, R.C., “Ferrofluid lubrication in step bearing with two steps,” *Indus. Lub. and Tribo*., Vol. **55**, No. 6, pp. 265-267(2003).
5. Dobrica, M., Fillon, M., “Reynolds' Model Suitability in Simulating Rayleigh Step Bearing Thermohydrodynamic Problems,” *Tribo. Trans.*, Vol. **48**, pp. 522-530 (2005)
6. Zhu, D., “Effect of surface roughness on mixed EHD lubrication characteristics,” *Tribolo.Trans.*, Vol. **46**, No. 1, pp. 44-48 (2003).
7. Christensen, H., “Stochastic models for hydrodynamic lubrication of rough surfaces,” *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol. **55**, pp. 1013-1025 (1969).
8. Christensen, H., Tonder, K., “The hydrodynamic lubrication of rough bearing surfaces of finite width,” A*SME J. of Lub. Tech.,* Vol. **93**, pp. 324-330 (1971).
9. Gururajan, K., Prakash, J., “Surface roughness effects in infinitely long porous journal bearings,” *J. of Tribo.*, Vol. **121**, pp. 139-146 (1999).
10. Chiang, H.L., Chou, T.L., Hsu, C.H., Hsu, C.H., Lin, J.R., “Surface roughness effects on the dynamic characteristics of finite slider bearings,” *J. of C.C.I.T.*, Vol. **34**, No. 2, pp. 29-39 (2005).
11. Naduvinamani, N.B., Siddangouda, A., “Effect of surface roughness on the hydrodynamic lubrication of porous step-slider bearings with couple stress fluids,” Tribo. Int., Vol. 40, pp. 780-793 (2007).

陸、 圖表彙整

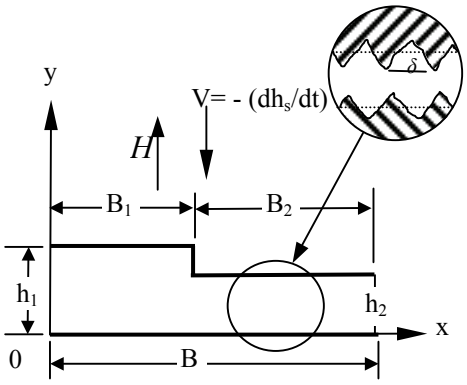

圖1 步階軸承示意圖

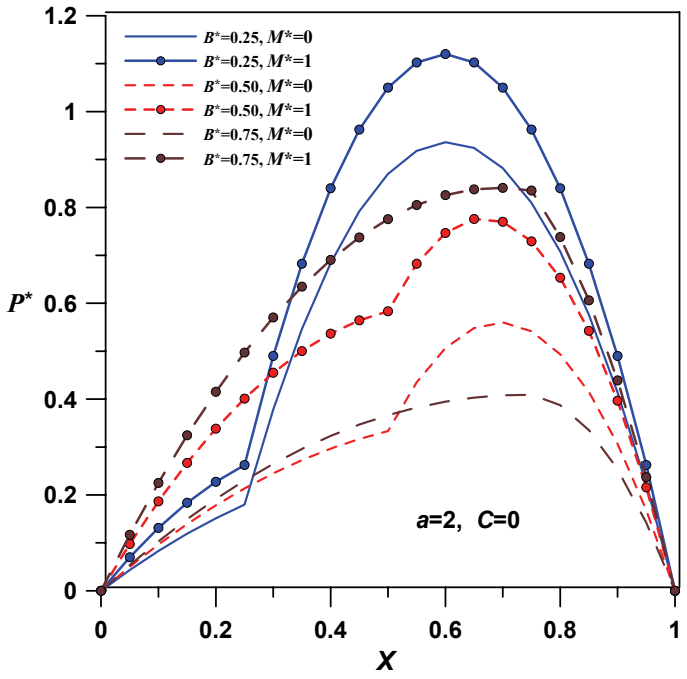

圖2 不同磁性參數M^*，步階軸承壓力之分佈

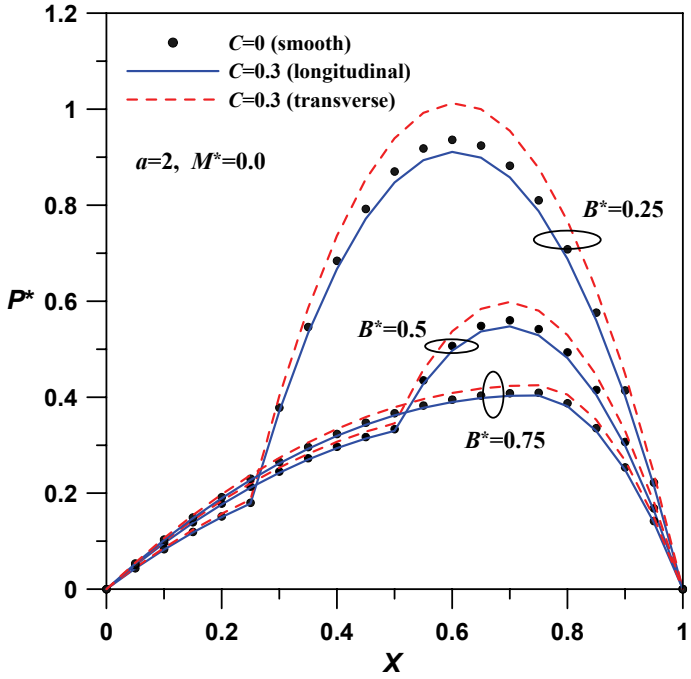

圖3 不同形狀參數B^*，表面粗糙度對步階軸承壓力分佈之影響

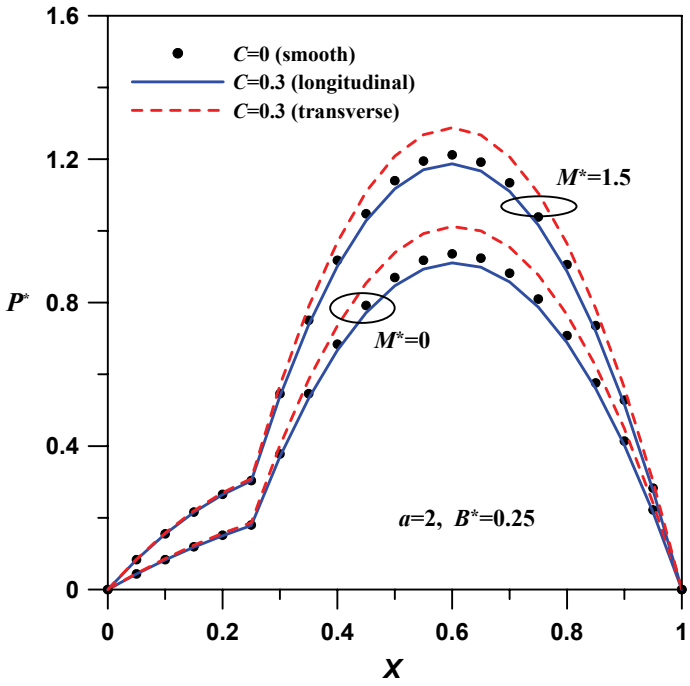

圖4 不同磁性參數M^*，表面粗糙度對步階軸承壓力分佈之影響

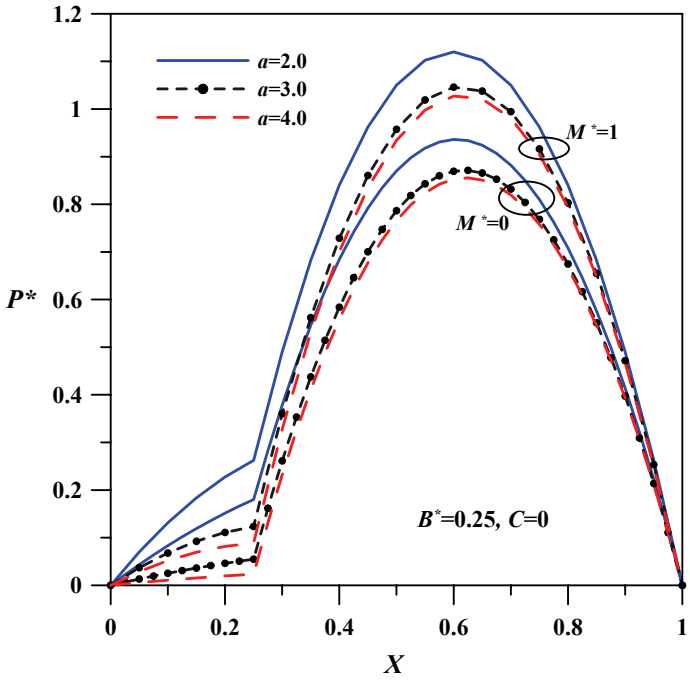

圖5 不同膜厚參數a，步階軸承壓力之分佈

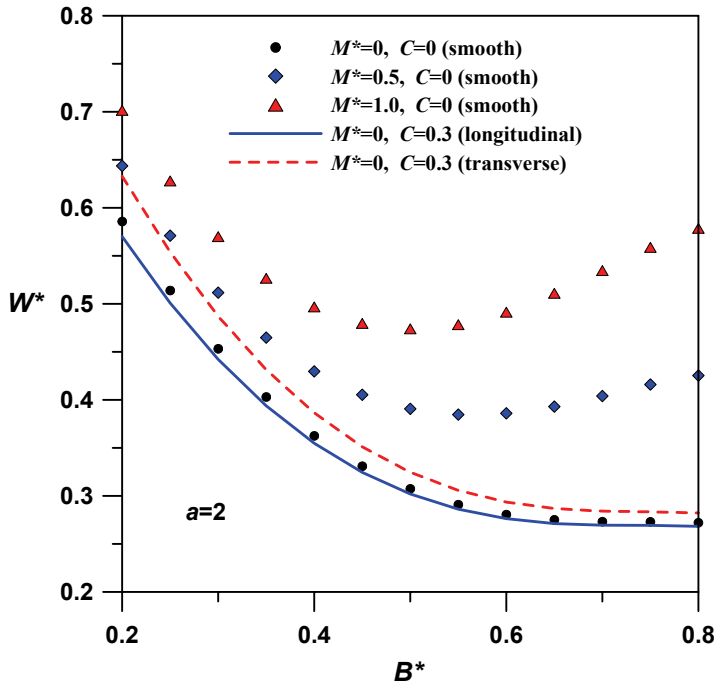

圖6 不同磁性參數M^*和粗糙度參數C，形狀參數和荷重能力之關係

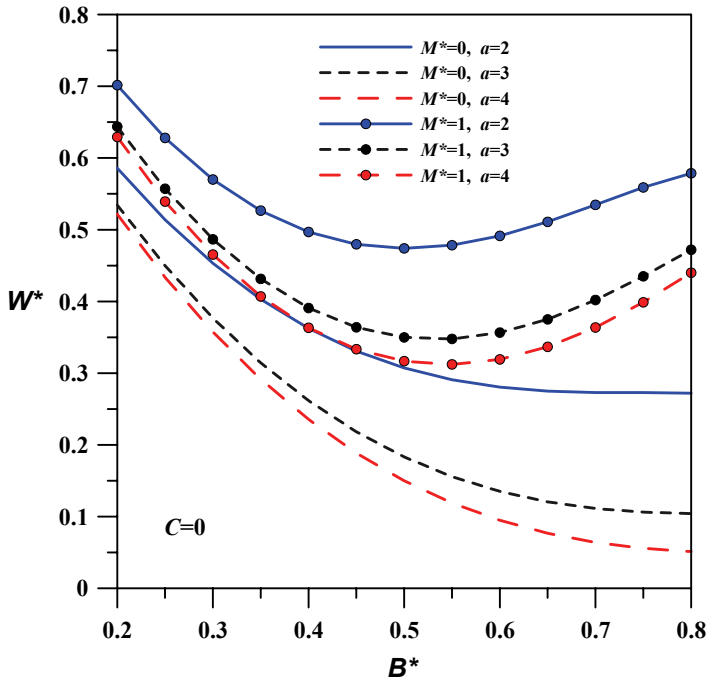

圖7 不同膜厚參數a，形狀參數和荷重能力之關係