圓柱散熱片端部效應對於溫度場之影響

郭家全[1*]、孔光源[1]、許政行[2]

[1] 南亞技術學院機械系

[2] 中原大學機械系教授

摘要

本文針對圓柱狀散熱片之熱傳導及溫度場問題，以分離變數法將偏微分方程式轉換為常微分方程式，再求得其傅立葉-貝索級數(Fourier-Bessel series)和指數函數形式的解析解。由研究結果得知，畢歐數值越大，其對流係數越大，故散熱效率越佳。散熱片的大小影響：較大的散熱面積，其量測的溫度較低，表示其散熱效果較佳。

關鍵字：熱傳導、對流、散熱片

gckuo@nanya.edu.tw

Tel:886-3-4361070ext6302

The Tip Effects on Temperature Field of a Cylindrical Fin

G.C. Kuo[1*], K.Y. Kung[1], C.H. Hsu[2]

[1] Department of Mechanical Engineering
Nanya Institute of Technology

[2] Department of Mechanical Engineering
Chung-Yuan Christian University

Abstract

A cylindrical fin problem is analysis by the method of separation variables. A partial differential equation is transferred into ordinary differential equations. The analytic solution is formed by Fourier-Bessel series and exponential functions. The results show that the larger Biot number the larger heat dissipation. The size effect shows that the more fin area will lead to more thermal dissipation.

Keywords: heat conduction, convection, fin

壹、前言

圓柱狀散熱片之熱傳導及溫度場的分析技術，已廣泛應用於電子產品散熱、車輛系統及其他工業產品之散熱的研究中。在熱的傳輸過程中，有三個主要因素的變化影響熱傳量：熱傳係數、散熱的面積及物體與周圍介質的有效溫度，藉由改變這三個條件可以改變熱傳量，而達到增加散熱的目的。

在已過關於散熱片散熱效果及外觀形狀有多種設計方式：一維、二維、三維。一維的研究對於其散熱效果的觀察過於簡化而難表現真實情況；三維的研究卻是因為過於複雜，而使得在研究上不易求出理論解。因此本文針對軸對稱圓柱狀散熱片，透過理論分析解以了解溫度場與熱傳導。當在散熱片內之熱傳導係數比散熱片表面之對流熱傳係數大很多時，才適用一維的理論分析；因為僅討論一維的溫度分佈，對於所能應付的問題有限，但是又因為多維的溫度分析研究起來過於複雜，故二維的溫度分佈最為適當，能解決更多的問題且不過於複雜難解。

一般在處理穩態或暫態(steady or transient state)散熱片的理論分析上，大多忽略散熱片在厚度或徑度方向的溫度變化，而過於簡化成為一維的溫度分佈函數。Aparecido 與 Cotta 等利用偶積分方程式法(coupled integral equation approach)將二維穩態矩形平板散熱片方程式與橫向邊界條件轉換成一維穩態方程式。經由偶積分方程式可以簡化問題的複雜程度，將二維的問題簡化成一維問題。當縱向畢歐數(longitudinal Biot Number)為 20 與無因次厚度等於 0.5 時，理論值與數值解之誤差值減少。在探討二維矩形平板散熱片熱傳問題時，考慮矩形平板散熱片之厚度或徑向方向的溫度變化以提升精確度。以二維方法所得的溫度分佈與根部熱通量均比一維方法較精確。

Ma,el.應用傅立葉級數方法(Fourier series approach)研究二維矩形平板散熱片表面上具有不同的熱傳係數，散熱片端部的溫度變化隨著散熱片之邊界條件的不同而有不同的結果。Aziz 利用有限元素法分析二維矩形散熱片之對流熱傳效應，散熱片內部具有熱源，且熱傳溫度並不均勻，在微觀的觀點下，不同種類材料的分子結構會影響熱傳的效應，造成溫度分佈不均勻。Su 與 Huang 探討二維圓柱散熱片端部對流情況，散熱片根部溫度成步階變化(step change)，利用重疊法與分離變數法求解。討論當散熱片長度較短時，橫向畢歐數與時間對端部熱傳對流效應之影響。因為時下的散熱片之形狀很多且大小也沒一定的規格，故不同形狀的散熱片的端部熱傳對流效應會隨著其畢歐數與時間長短。Aziz 研究有關散熱片最佳化，利用各種數值例子說明最佳化過程，討論端部熱的流失、熱傳係數的變化、初始熱源、熱傳導性、對流及表面厚度對最佳化的影響。

Aziz 與 Lundardini 利用解析或數值方法分析一維、二維散熱片，其根部突然受等溫或等熱通量變化之暫態熱傳現象，為理論分析上之簡便，將散熱片端部假設為絕熱，探討一維與二維暫態分析上之誤差值。當要探討研究的變數很多時，可以適當的做假設，根據討論的方向，對根部或是端部假設是否有熱通量、或是熱傳量，或假設為絕熱狀態，使研究方向簡化。但是一般情況下，絕熱的情形不常存在，相對的總是會有熱能通過散熱片的根部或是端部，所以才會有散熱片分析的必要性，藉由散熱片的設計與改良，使熱的傳導性變大，提升相對熱的散失，或是能量轉換運用才有相當大的效應。不同的熱傳係數材質，對於其相對的效應也有所不同，因為上下兩邊的熱傳係數不同可以使熱的傳導有對流性質產生，正因為上下兩邊的熱傳係數的值不同，亦導致兩邊的溫布分佈形成不對稱的主要原因。

Su 與 Hwang 針對二維矩形平板散熱片具有不相等上下表面對流熱傳係數，根部突受到等溫度變化之暫態問題，利用拉普拉斯轉換與分離變數法，然後再應用傅立葉法求解，但仍為近似解。Unal, H. C.藉由改變各種形狀的散熱片之熱傳係數，透過不一致性的熱傳係數，決定溫度在各散熱片內的分佈與影響性，得知不同的對流熱傳係數有不同的散熱效果。Look, D. C., Jr. 在二維矩形平板散熱片中，改變不同的畢歐數之數值，比較根部畢歐數、圓周表面畢歐數與端部畢歐數對溫度分佈效應的影響看何者為顯著，藉由給不同的畢歐數值，對散熱的效果作評估，在不同的值表示出來的散熱效果中，實驗嘗試出最佳化的畢歐數比值，使散熱效果大為提升。

Yang, J. W., 與 Aziz. A.將散熱片設計成不同的形狀，透過不同形狀的散熱片(直立式、環列式…等形狀)，實驗測試形狀對於散熱的影響，改變形狀的最大方針為，設計出與環境溫度有最大的接觸面積與最省空間的設計，使散熱片的散熱效果增加，同時可以使散熱片的成本降低。Suryanarayana, N. V. 與 Chu, H. S., Chen, C. K.也是根據不同的散熱片鰭片，觀察其對於系統散熱的優劣比較，多種形狀的研究設計均是在增加散熱面積的大小，使鰭片與散熱環境溫度增加接觸面積使反應增加，根據不同文獻的研究與比較可以知道，散熱片的形狀、熱傳係數與畢歐數值的影響頗大，使得設計的方向明顯也能準確的增加散熱片的效果，使器材壽命增加，危險降低。

貳、問題描述

基本假設

針對軸對稱圓柱散熱片探討其根部受制於恆溫度作用下其端部的熱傳變化之暫態熱傳

分析與溫度場之影響。其物理模型如圖 1 所示。

基本假設條件：

軸對稱圓柱散熱片圓周表面對流熱傳係數、端部表面對流熱傳係數及根部表面熱傳係數皆為常數。圓柱體在外觀下由三個部分架構而成：根部(底部)、柱狀部分(圓周表面)、端部、均受到熱傳係數值的影響，故對這三個部分做基本的假設。

軸對稱圓柱散熱片內部溫度變化為軸對稱。建立在散熱片的材質均勻且內部分子的結構規則，使得溫度的分佈成為軸對稱。

散熱片之物理性質均為常數。

環境溫度維持一定(室溫 25℃)及散熱片根部保持定溫。

忽略熱輻射效應。

2.2 方程式

因圓柱體具有其幾何對稱性，所以單以一個切面來討論其熱傳效應及溫度分佈情形即可了解散熱片內部溫度分佈情況。藉由應用傅立葉(Fourier’s Law)冷卻定律及能量不滅定律，可建立軸對稱圓柱散熱片熱傳導熱傳方程式之統御方程式為：

$$\frac{\partial u(r,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(r,z,t)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u(r,z,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u(r,z,t)}{\partial r} \tag{1}$$

假設此散熱片在剛開始時與環境流體達到熱平衡，因此其初始條件為：

$$t=0,\ \ u(\mathrm{r},z,0)=0 \tag{2}$$

其邊界條件為：

$$t>0,\ r=0,\quad \frac{\partial u(0,z,t)}{\partial r}=0 \tag{3}$$

$$r=A1,\quad \frac{\partial u(A1,z,t)}{\partial r}+D(Bi2)u(A1,z,t)=0 \tag{4}$$

其中 $A1$ 為圓柱狀散熱片之半徑。

$$z=0,\quad u(r,0,t)=1 \tag{5}$$

$$z=1,\quad \frac{\partial u(r,1,t)}{\partial z}+(Bi1)u(r,1,t)=0 \tag{6}$$

叁、問題解析

在解熱方程式之解析解過程中，重要的是將統御方程式中的變數簡化，由最初的三個

變數偏微方程簡化成為三個單一變數常微方程式，再透過解單一變數之微分方程式之解法，即可求得解析解。

軸對稱圓柱散熱片之圓心及圓周邊界條件(3)(4)滿足貝索函數展開式(Bessel Function Expansion)條件及分離變數法，則無因次溫度分佈函數轉換為：

$$u(r,z,t)=u_m(z,t)R(r) \tag{7}$$

令 r-方向微分方程式的特徵解滿足貝索方程式(Bessel's equation)，故可分離變數如下：

$$u(r,z,t)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(z,t)J_0(\alpha_m r) \tag{8}$$

貝索函數會自動滿足邊界條件(3)和(4)。

同理，將非齊次性的空間邊界條件轉換成齊次邊界條件，z-方向微分方程式的齊次特徵解滿足傅立葉級數：

$$u_m(z,t)=zA+(1-z)B+\overline{u_m}(z,t) \tag{9}$$

$$t=0 \quad \overline{u_m}(z,0)=-[zA+(1-z)B] \tag{10}$$

$$t>0 \quad z=0 \quad \overline{u_m}(0,t)=0 \tag{11}$$

$$z=1 \quad \frac{\partial\overline{u_m}(z,t)}{\partial z}+Bi1\overline{u_m}(z,t)=0 \tag{12}$$

其中 A, B 為相關係數。

$$A=\frac{g_m}{1+(Bi1)} \tag{13}$$

$$B=g_m \tag{14}$$

$$g_m=\frac{2J_1(\alpha_m A1)}{A1\alpha_m[1+D^2(Bi2)^2]J_0(\alpha_m A1)} \tag{15}$$

為將空間與時間變數分離，假設：

$$u_m(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(t)\sin(\beta_n z) \tag{16}$$

其中 β_n 為(17)式的根,

$$\beta_n \cot\beta_n=-(Bi1) \tag{17}$$

畢歐數代表固體與流體之傳導對流狀況當畢歐數趨近無窮大時表示恒溫狀態。當畢歐數趨近零時表示絕熱狀態。

時間之常微分方程式可用積分因子解得：

$$u_{mn}(t)=\frac{C_{mn}}{\alpha_m^2+\beta_n^2}[\alpha_m^2+\beta_n^2 e^{-(\alpha_m^2+\beta_n^2)t}] \tag{18}$$

其中

$$C_{mn}=\frac{2\{A\cos\beta_n-B-[(A-B)/\beta_n]\sin\beta_n\}}{-\cos\beta_n\sin\beta_n+\beta_n} \tag{19}$$

整合上述各項微分方程式的解可得完全解：

$$u(r,z,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{zA+(1-z)B+\sum_{n=1}^{\infty}[u_{mn}(t)\sin\beta_n z]\right\}J_0(\alpha_m r) \tag{20}$$

肆、結果與討論

將以上得到的解析以 Matlab 繪出其在各種不同參數之溫度分佈和熱傳導圖形，並分別討論如下：

圖 2，在取值為 $Bi2=0.05$，$Bi1=0.05$，$D=5$ 之情況下，由於軸對稱圓柱散熱片根部受制於一固定溫度作用，在相當小的時間內，由圖中可以知道熱傳遞並未達到端部部份，故溫度分佈只在根部部份即已接近環境溫度，隨著時間的增加，散熱片的內部傳導效應與散熱片表面對流熱效應的作用，使得熱量透過傳導、對流效應傳到端部，在同一散熱片的位置上，其溫度隨著時間的增加有增高的物理現象，熱由散熱片表面的散去，使端部的溫度比根部溫度之值小，且其溫度沿散熱片方向而遞減，到達端部時，其值最低。

圖 3，在相同時間下，給定 $Bi2$ 值，使 H 值為 1，在此條件下，探討隨著 D 的改變，散熱片的溫度分佈有相對的影響，由圖中可以明顯的看出，當 D 值越大時散熱片表面積越大，表示散熱片的散熱效果越佳，故在散熱片端部所量測的溫度比其他不同的數值 D

要來的低上許多。

圖 4 表示 $Bi1$ 值等於 $Bi2$ 討論散熱片根部，由改變不同 $Bi2$ 值，觀察其個別表示的熱通量，$Bi2$ 值越大者其熱傳量越大。在極短時間內($t<0.05$)，不同 $Bi2$ 的值其熱通量蠻接近的，因為圓周表面畢歐數的增加使熱量散失，$0.05<t<1.2$ 時，熱通量因為 $Bi2$ 值的變化，使得熱傳量有明顯的變化，$Bi2$ 值越大者其熱傳量越大。$t>1.2$ 時，熱通量隨著 $Bi2$ 值的增加而較大且熱通量趨於穩定。

伍、結論

本文主要討論軸對稱圓柱散熱片圓周表面與端部對流效應之暫態熱傳分析，一般物體作用產生的熱量，經由傳導、對流方式由高溫將熱量傳至低溫處，利用分離變數法將偏微分方程式簡化得到解析解，再以 Matlab 繪出其在各種不同參數之溫度分佈和熱傳導圖形，得到以下的結論：

軸對稱圓柱散熱片之根部、圓周表面與端部的畢歐數值直接影響著散熱片的效率，由研究結果得知，畢歐數值越大，其對流係數越大，故散熱效率越佳。

散熱效果除了各部位之畢歐數值的差異，另外散熱片的大小影響：較大的幾何長度，其量測的溫度較低，表示其散熱效果較佳。

陸、參考文獻

1. Asses, E. and Kalman H., “Transient temperature response of different fins to step initial conditions,” Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 36, pp. 4107-4114 (1993).
2. Aparecido, J.B. and cotta, R.M.,“Improved One-Dimensional Fin Solution,” Heat Transfer Engineeringm, Vol. 11, pp. 49-59 (1990).
3. Aziz, A., and Nguyen, H.,“Two-dimensional effects in a triangular convecting fin,” AIAA, J. Thermophysics, Vol. 6, pp. 165-167 (1992).
4. Aziz, A., Periodic Heat Transfer in Annular Fins, ASME J. Heat Transfer, Vol. 97, pp. 302-303 (1975).
5. Aziz, A. and Tesarik, D. R., “Two-dimensional heat transfer from a rectangular fin asymmetrical thermal boundary conditions,”Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 19, pp.229-238 (1992).

6. Aziz, A and Kraus, A. D. “Transient heat transfer in extended surfaces,” Appl. Mech. Rev., Vol. 48, pp. 317-350 (1995).
7. Aziz, A. and Lundardini V. J., “Analytical and numberical modeling of steady periodic heat transfer in extended surfaces,” Computational Mechanics, Vol. 14, pp. 387-410 (1994).
8. Aziz, A, and Kraus, A. D., “Optimum design of radiating and convecting-radiating fins,” Heat Transfer Engineering, Vol. 17, pp. 19-29 (1996).
9. Carslaw, H. S., and Jaeger J. C., Conduction of Heat in Solids, 2d ed., pp. 492-493, Oxford University Press, New York (1959).
10. Chu, H. S., Chen, C. K., and Weng, C. I., Transient Response of Circular Pins, ASME J.Heat Transfer, Vol. 105, pp. 205-208 (1983).
11. Look, Jr, D. C. and Kang, H. S., “Effects of variation in root temperature on heat lost from a thermally non-symmetric fin,” Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 34, pp. 1059-1065 (1991).
12. Look, D. C., Jr., Two-Dimensional Fin Performance: Bi(top surface) Bi(bottom surface), ASME J. Heat Transfer, Vol. 110, pp. 780-782 (1988).
13. Look, D. C. Jr., Two-Dimensional Fin with Non-Constant Root Temperature, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 32, no. 5, pp. 977-980 (1989).
14. MA, S.W., Behbahani, A.I. and Tsuei,Y.G., “Two-dimensional rectangular fin with variable heat transfer coefficient,” Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 34, pp. 79-85 (1991)
15. Su, R. J.and Hwang, J. J. “The reduced form of the transient heat transfer equation of two-dimensional rectangular plate fin,”The Chinese J. Mechanics, Vol. 13, pp. 101-105 (1997).
16. Su, R. J. and Hwang, J. J., “Transient analysis of two-dimensional cylindrical pin fin with tip convective effects,” Heat Transfer Engineering, Vol. 20, pp. 57-63 (1999).
16. Su, R. J. and Hwang, J. J., “Study on transient heat transfer problem of two-dimensional rectangulas plate fin,” The Chinese J. Mechanics, Vol. 12, pp. 291-295 (1996).
17. Suryanarayana, N. V., Transient Response of Straight Fins, ASME J. Heat Transfer, Vol.97, pp. 417-423 (1975).
18. Unal, H. C., Determination of the Temperature Distribution in an Extended Surface with a Non-Uniform Heat Transfer Coefficient, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 28, no.

12, pp. 2279-2284 (1985).

19. Unal, H. C., Temperature Distributions in Fins with Uniform and Non-Uniform Heat Generation and Non-Uniform Heat Transfer Coefficient, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30, no. 7, pp. 1465-1477 (1988)

20. Yang, J. W., Periodic Heat Transfer in Straight Fins, ASME J. Heat Transfer, Vol. 94, pp. 310-314 (1972).

柒、圖表彙整

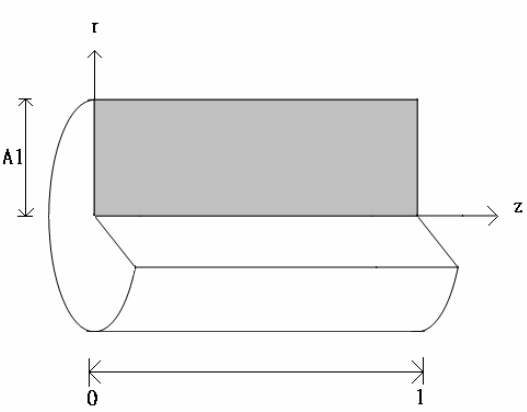

圖 1 軸對稱圓柱銷狀散熱片幾何圖形

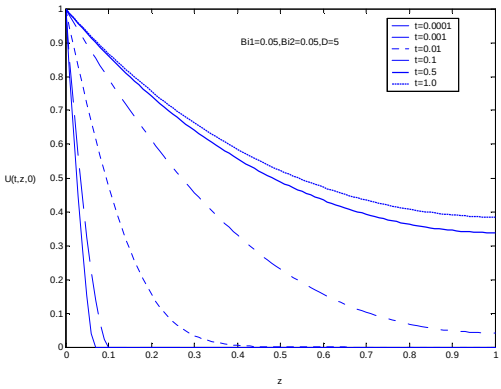

圖 2 溫度分佈 $u(r,z,t)$ 與散熱片長度及時間變化的關係圖

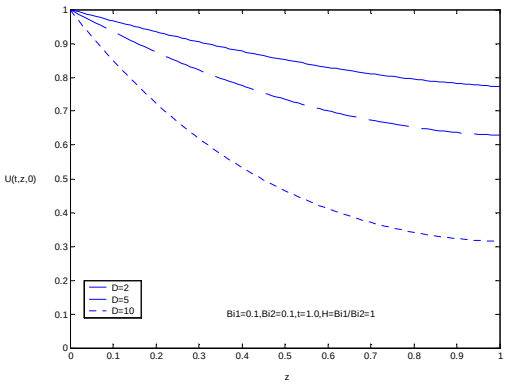

圖 4 在相同時間下，相對對流效應圖示。

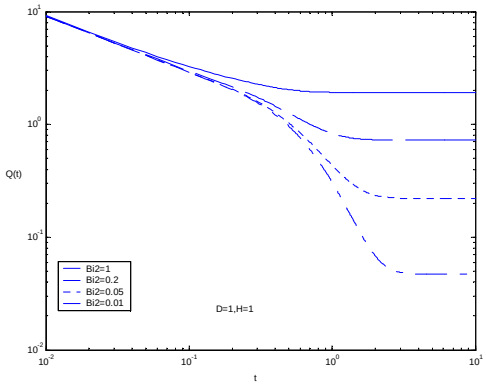

圖 3 散熱片根部熱通量的變化。